

Дифференциальное исчисление.

Правила дифференцирования.

<p>Производная суммы:</p> $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	<p>Производная произведения:</p> $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ <p><i>Следствие: $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, где $C = const$</i></p>
<p>Производная частного:</p> $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	<p>Производная сложной функции:</p> $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Таблица производных:

$$(c)' = 0, \text{ где } c = const$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$(e^x)' = e^x; \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

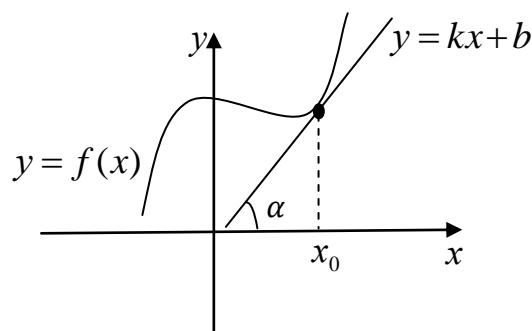
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Геометрический смысл производной:

$$f'(x_0) = k = tg \alpha,$$

где k — угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 ;

α — угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.



1. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция возрастает на нем.

2. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция убывает на нем.

Точки максимума и минимума называют **точками экстремума функции**.

Значение функции в точке экстремума называют **экстремумом функции**.

Интегральное исчисление. Правила интегрирования.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке. Тогда:

1. $F(x) \pm G(x)$ – первообразная функции $f(x) \pm g(x)$
2. $a \cdot F(x)$ – первообразная функции $a \cdot f(x)$
3. $\frac{1}{k} \cdot F(kx + b)$ – первообразная функции $f(kx + b)$

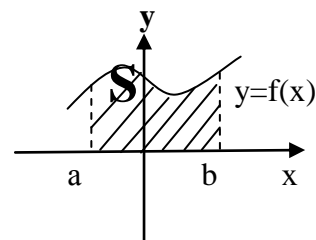
Таблица первообразных:

$f(x)$	$F(x)+C$
a (a – некоторое число)	$ax + c$
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$



Степенная функция

1. Функция вида $y = x^n$, где x – независимая переменная, а n – натуральное число называют **степенной функцией с натуральным показателем.**

Свойства степени с рациональным показателем:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad 2) a^m : a^n = a^{m-n} \quad \text{или} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad 3) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$4) (ab)^n = a^n \cdot b^n \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad 6) a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad 7) \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad 8) a^0 = 1$$

2. Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b , n -ая степень которого равна a : $\sqrt[n]{a} = b$, где $b \geq 0$, $b^n = a$.

3. Свойства арифметического корня n -ой степени:

Если $a \geq 0$, $b > 0$, $n \geq 2$, $m \geq 2$, то:

$$1) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad 2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad 3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad 4) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$5) \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad 6) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

4. Если a - любое число, то:

- 1) $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, где n – четное
2) $\sqrt[n]{a^n} = a$, где n – нечетное

Показательная функция.

1. Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ называют показательной функцией.
2. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.
3. Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Логарифмы

Определение

$$\log_a b = x, \quad \text{если} \quad a^x = b$$

$$a > 0, a \neq 1; b > 0$$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$

Десятичные и натуральные логарифмы: $\log_{10} b = \lg b$

$\log_e b = \ln b$

Свойства логарифмов:

$$a > 0; a \neq 1$$

$$1) \log_a 1 = 0$$

$$2) \log_a a = 1$$

$$3) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c; \quad b > 0, c > 0$$

$$4) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c; \quad b > 0, c > 0$$

$$5) \log_a b^r = r \cdot \log_a b; \quad b > 0$$

$$6) \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b; \quad b > 0; \quad k \neq 0$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad c > 0; c \neq 1; b > 0$$

$$8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad b > 0; b \neq 1$$

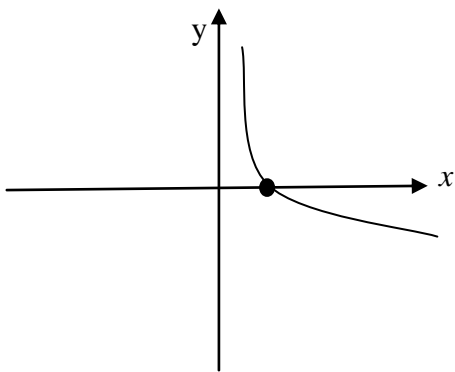
Логарифмическая функция

$$y = \log_a x$$

$$a > 0; a \neq 1$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

Функция убывает
при $0 < a < 1$



Функция возрастает
при $a > 1$

